《4 次関数で複接線の存在条件》

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ は実数係数の 4 次関数である．曲線 $y=f(x)$ に異なる 2 点で接する直線（複接線）が存在するための必要十分条件は $f''(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．

【証明】 題意のようになるための必要十分条件は

$$f(x)-(mx+n)=(x^2+px+q)^2,\ p^2-4q>0$$

となる実数 p, q, m, n が存在することである．もし，このように書けるならば，2 回微分して

$$f''(x)=2(2x+p)^2+4(x^2+px+q)$$

$$f''(x)=12x^2+12px+2p^2+4q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

この判別式を D として

$$\frac{D}{4}=12(p^2-4q)>0$$

となる．$f''(x)=0$ は相異なる実数解をもつ．

一方，$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ を 2 回微分して

$$f''(x)=12x^2+6ax+2b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となり，①，② の係数を比べ

$$6a=12p,\ 2b=2p^2+4q$$

すなわち

$$p=\frac{a}{2},\ q=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$$

を得る．

$$f(x)-\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}\right)^2$$

$$=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

$$-\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}\right)^2$$

を展開すれば

$$\left(c-\frac{ab}{2}+\frac{a^3}{8}\right)x+d-\frac{a^4}{64}+\frac{a^2b}{8}-\frac{b^2}{4}$$

となるから，直線

$$y=\left(c-\frac{ab}{2}+\frac{a^3}{8}\right)x+d-\frac{a^4}{64}+\frac{a^2b}{8}-\frac{b^2}{4}$$

が複接線となる．

曲線 $y=f(x)$ と 2 個以上の点で接する接線を複接線という．以下では，実数全体で $f(x)$ が微分可能であることは前提とはしないで書く．

4 次関数の場合ならば，複接線の存在条件は $f''(x)=0$ の解の個数と結びつくが，一般の関数となると，複接線の存在性と $f''(x)=0$ の解の個数とは，必要十分条件の形では結びつかない．たとえば $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ は $f''(x)=0$ は 2 つの異なる解をもつが，複接線は存在しない．だから，複接線が存在するための必要十分条件を簡単に書くことはできない．不連続関数でもよければ（つまりそこでは微分可能でない），2 回微分可能な点で $f''(x)>0$ であっても複接線が存在する例を示すことはできる．実数全体で 2 回微分可能ならば，複接線が存在するためには $f''(x)=0$ が異なる 2 解をもつことは必要条件となるが，十分とはいえない．